ОЛИМПИАДА КІТАПХАНАСЫ

С.Е. Рукшин

# ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Республиканский научно-практический центр “Дарын”

С.Е. Рукшин

# “Теория чисел в задачах”

## Сборник задач

Алматы, 2001

**ББК 22.1**
**Р84**

**Рукшин Сергей Евгеньевич** – профессор Российского Государственного Педагогического университета им. А. Герцена

Сборник задач **"ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧАХ"**. – Алматы РНПЦ "Дарын"; 2001– 53 с.

ISBN 9965–522–07–3

Этой книгой Республиканский научно-практический центр «Дарын» Министерства образования и науки Республики Казахстан открывает серию, предназначенную для одаренных школьников и их учителей, желающих расширить и углубить свои знания по различным разделам элементарной математики. В первую очередь она ориентирована на учащихся, которые готовятся к выступлению на олимпиадах высокого уровня.

Книга отражает многолетний опыт автора, который в течение 25 лет готовил сборные команды Ленинграда (Санкт-Петербурга), СССР, России, Казахстана и других стран к выступлению на Международных Математических Олимпиадах.

Существенная часть материала была положена в основу подготовки по теории чисел национальных сборных команд Республики Казахстан к Международным олимпиадам 2000 и 2001 годов.

Книга содержит более 360 задач, иллюстрирующих различные идеи, методы и теоремы элементарной теории чисел; задачи расположены в порядке возрастания сложности в каждой серии задач, а в последнем разделе сгруппированы по темам. Книга пригодна также в качестве задачника по теории чисел для математических специальностей университетов и педагогических институтов.

Рекомендовано к изданию Ученым советом РНПЦ «Дарын»  ББК 22.1



$Р\frac{1602000000}{00(05)-01}$

ISBN 9965–522–07–3

Содержание:

## ОТ АВТОРА

Лежащая перед Вами книга посвящена элементарной теории чисел. Изучение свойств натуральных чисел, наряду с геометрией, является одной из древнейших математических дисциплин. Ее основы были заложены в VI веке до н.э. Пифагором и его учениками – именно им принадлежат также понятия, как простые и составные числа, совершенные числа, дружественные числа, основные понятия теории делимости и первые результаты о решении уравнений в целых числах. Однако уже поздние пифагорейцы открыли, что некоторые отношения нельзя выразить с помощью целых чисел: диагональ квадрата оказалась *несоизмеримой* с его стороной, то есть отношение их длин нельзя выразить с помощью отношения натуральных чисел. Это открытие ознаменовало, с одной стороны, крушение пифагорейской точки зрения, согласно которой мир описывался целыми числами, а с другой – естественное расширение изучаемых чисел за счет чисел *иррациональных*. Созданные Феодором и Теэтетом основы теории иррациональностей вместе с пифагорейской теорией делимости составили в IV веке до н.э. заметную часть знаменитых «Начал» Евклида. Там же содержались и новые результаты. Среди них – знаменитые теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел и совершенных числах, алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя, а также простейшие уравнения в целых числах, в частности, способ отыскания пифагоровых троек. В III веке до н.э. Архимед рассмотрел некоторые частные случаи так называемого уравнения Пелля, а Эратосфен описал *решето Эратосфена* – способ выделения из натурального ряда всех простых чисел до заданной границы.

Тем не менее, говорить о теории чисел, как об отдельной области математических исследований с полной определенностью можно лишь с III веке нашей эры, когда была написана «Арифметика» Диофанта, в которой были рассмотрены общие методы решения различных типов неопределенных уравнений и систем в целых и рациональных числах. Из работ Диофанта позднее родились как общая теория диофантовых (неопределенных) уравнений, так и теория *диофантовых приближений* – задач, посвященных приближению иррациональных чисел рациональными.

Издание в XVI веке сочинений Диофанта на латыни и европейских языках дало новый толчок развитию теории чисел в работах Виета, Баше де Мезириака, Мерсенна и, в первую очередь, П.Ферма. В конце XVIII – начале XIX веке трудами Эйлера, Лежандра, Лагранжа и Гаусса была создана цельная теория степенных вычетов и сравнений.



Так здание элементарной теории чисел на протяжении более чем двухтысячелетней истории приобрело знакомый нам современный вид.

В этой книге мы не ставили целью сколько-нибудь подробное изложение теории – существует огромное количество замечательной литературы, посвященной изложению основ теории чисел. Это всего лишь задачник, призванный проиллюстрировать избранные методы решения задач по элементарной теории чисел. Но это не обычный задачник - задачи в нем объединены не по принципу *похожести условий*, а по основной (или одной из основных) идее решения. С этой точки зрения мы отдаем безусловный приоритет *методу*, которым решается задача, а не *факту*, который пытаемся доказать. Вместе с тем, мы старались по возможности упомянуть все красивые результаты и теоремы, которые доступны неспециалисту.

Таким образом, это скорее *курс теории чисел в задачах* - по мнению автора, именно такой способ изучения, в отличие от чтения чужих доказательств теорем и чужих решений, дает возможность активно усвоить курс и почувствовать вкус к самостоятельному математическому творчеству и научным исследованиям.

В книге содержится более 360 задач, разбитых на 12 серий, в соответствии с основной идеей или первым шагом решения. Начиная с задач, для решения которых достаточно успешного усвоения школьного курса арифметики, алгебры и теории чисел, по нарастанию сложности в каждой серии мы стараемся довести изложение до задач уровня национальных и международных математических олимпиад. В соответствии с этим, книгу можно использовать для подготовки участников олимпиад высокого уровня.

Вместе с тем, подсказка методы решения, которую дает название серии, делает возможным использование задачника в работе школьных кружков, а также для расширения и углубления знаний по теории чисел студентами университетов и педагогических ВУЗов.

При таком подходе задачи рекомендуется решать не в разбивку, а по сериям - выбрав определенную серию рекомендуется потратить достаточно продолжительное время на решение задач этой серии, и только после завершения работы над ней переходить к другой. Сами серии достаточно независимы друг от друга и нет необходимости решать их именно в том порядке, в котором они расположены в книге.

Для учителя и преподавателя ВУЗа возможно и другое использование задачника. Он без труда сможет выделить из разных разделов задачи, объединенные общностью формы (например, диофантовы уравнения) и проиллюстрировать различные методы решения этих задач - от поиска модуля до применения классических теорем Ферма, Эйлера и Вильсона.

Собранные здесь задачи взяты из различных источников. Наряду с задачами, известными по многочисленным учебникам и задачникам по теории чисел, сюда вошли авторские задачи, задачи региональных, национальных и международных олимпиад, а также большой пласт "фольклорных" задач, которые автор собирал в течение трех десятилетий.

Эти задачи неоднократно использовались при работе школьных и студенческих кружков, подготовке школьников СССР, России и Казахстана к олимпиадам различного уровня. В этом смысле по уровню трудности они доступны для учащихся. Однако не стоит отчаиваться, если какая-то из них не поддастся Вашим усилиям - многие из них достаточно трудны и требуют многих *часов* работы.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность руководству и коллективу центра "Дарын" Министерства образования и науки Республики Казахстан, стимулировавших систематизацию этих задач и написание этого сборника, а также всех, кто способствовал его появлению на свет. Всем им - огромное спасибо.

С.Е.Рукшин



## 1. МОДУЛЬ

**1.** На сколько нулей оканчивается число $9^{999}+1$?

**2.** Существует ли натуральное $n$ такое, что число $3^n+1$ делится на $10^{100}$?

**3.** a) решите в целых числах уравнение $x^2+y^2=19861986$;

b) решите в целых числах уравнение $x^4+y^4=1986198519841983$.

**4.** Докажите, что уравнение $x^8+y^8=1972^{1972}+1973^{1973}+1974^{1974}$ не имеет решений в целых числах.

**5.** Решите уравнение в натуральных числах: $105^x+211^y=106^z$.

**6.** Докажите, что произведение $p_1p_2...p_n$ первых $n$ простых чисел при $n>1$ не может на 1 отличаться от полного квадрата.

**7.** Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в простых числах: a) $p^2+q^2=r^2$

b) $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$

**8.** Решите уравнение в целых числах:

$(3a^3+a+12)^2=21a^5+1985$.

**9.** Решите уравнение $2^n+8n+5=k^2$ в натуральных числах.

**10.** Докажите, что уравнение $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах.

**11.** Решите в простых числах уравнение $1+x^y=z$.

**12.** Найдите все простые числа $p$ такие, что число $p^4-606$ также является простым.

**13.** Известно, что числа $p$, $p^3-6$, $p^3+6$ - простые. Найдите $p$.

**14.** Докажите, что в последовательности $4^2+1$, $14^2+1$, $24^2+1$, $34^2+1$, … имеется бесконечно много составных чисел.

**15.** Решите в натуральных числах уравнение $2^n-1=k^2$
*(см. также задачу 39 серии 6).*

**16.** Докажите, что при натуральных $m \neq n$ числа $2^m$ и $2^n$ имеют различные наборы цифр.

**17.** Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составить шестизначное число, делящееся на 11?

**18.** Делится ли число 192021...7980 на 1980?

**19.** Докажите, что при любом натуральном $n$ сумма цифр числа $1981^n$ не меньше 19.

**20.** Числа $n+1$ и $2n+1$ являются точными квадратами. Докажите, что число $n$ делится на 24.

**21.** Известно, что $n+1 \vdots 24$. Докажите, что сумма всех делителей числа $n$ также делится на 24
*(см. также задачу 9 серии 8).*

**22.** Докажите, что число $\underbrace{2..2}_{1982}$ не представимо в виде $xy(x+y)$, где числа $x, y$ - натуральные.

**23.** Может ли

a) $5^n-1$ делиться на $4^n-1$;

b) $7^n-1$ делится на $6^n-1$?

**24.** Какие числа вида $\underbrace{9..9}_{n}$ представляются в виде суммы двух квадратов целых чисел?

**25.** При каких $n$ число $\underbrace{2..2}_{n}$ представимо в виде

a) разности двух квадратов;



b) суммы двух квадратов?

**26.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы

a) двух квадратов;

b) трех квадратов.

**27.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы

a) двух кубов;

b) трех кубов.

**28.** Докажите, что число $1\underbrace{0...0}_{48}6\underbrace{0...0}_{97}1$ не является кубом натурального числа
*(см. также задачу 6 серии 2).*

**29.** Найдите минимум выражения $|36^k-5^l|$ при натуральных $k$ и $l$.

**30.** При каких $n$ число $2^n+3^n+4^n$ является полным квадратом?

**31.** При каких $n$ число является полным квадратом:

a) $6^n-5^n$;

b) $7^n-6^n$ ?

**32.** Решите в натуральных числах уравнение:

a) $2^n+65=k^2$;

b) $3^n+55=k^2$.

**33.** Шесть простых чисел являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30.

**34.** Пятнадцать простых чисел являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30 000.

## 2. НЕРАВЕНСТВА И РОСТ

**1.** К числу $2^n$ приписали число $5^n$. Сколько цифр в получившемся числе?

**2.** Для некоторого натурального $n$ числа $2^n$ и $5^n$ начинаются с одной и той же цифры. Какая это цифра?

**3.** Можно ли из набора гирь $3^1,..,3^n$ выбрать два набора одинакового веса?

**4.** Докажите, что число $1981^{1986}+30^{1986}$ не является полным квадратом.

**5.** a) Найдите наибольшее натуральное число $x$ такое, что число $4^{27}+4^{1000}+4^x$ является полным квадратом.

b) Найдите все натуральные $n$, для которых число $2^8+2^{11}+2^n$ является полным квадратом.

**6.** Докажите, что число $1\underbrace{0\ldots0}_{48}6\underbrace{0\ldots0}_{97}1$ не является кубом натурального числа

*(см. задачу 28 серии 1).*

**7.** Найдите все 200-значные числа, начинающиеся с 99 девяток и являющимися полными квадратами.

**8.** При каких целых $x$ числа $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ и $\sqrt{x}$ одновременно целые?

**9.** Докажите, что не существует натуральных $m$ и $n$ таких, что числа $m^2+n$ и $n^2+m$ являются полными квадратами.

**10.** Решите в натуральных числах уравнение $n^2+3n=k^2$.

**11.** Найдите все натуральные $n$ такис, что $n^2+2n+12=m(m+1)$, где $m$ - натуральное.



**12.** Докажите, что при натуральных $m$ и $n$ уравнения не имеют решений:

a) $n(n+1)=m(m+2)$;

b) $n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$;

c) $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

**13.** Решите в целых числах уравнение $x^3-y^3=91$.

**14.** Существует ли такое простое $p$, что сумма всех натуральных делителей числа $p^4$ является точным квадратом?

**15.** Найдите все простые $p$ и $q$, для которых $p^2-p+1=q^3$. *(СПб95)*

**16.** Найдите все целые числа $a$, $b$, $c$ такие, что $1<a<b<c$ и число $(a-1)(b-1)(c-1)$ является делителем числа $abc-1$.

**17.** Решите в натуральных числах уравнение

a) $3^n+4^n=5^n$;

b) $\dfrac{3^n+5^n}{2}=4^n$.

**18.** Для натуральных $x$ и $y$ выполняется равенство $x^x+y^y=x^y+y^x$. Докажите, что $x=y$.

**19.** Докажите, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в натуральных числах при $n\geq z$.

**20.** Найдите все тройки неотрицательных целых $x,y,z$ такие, что равенство $x^n+y^n=z^{n+1}$ выполнено при бесконечном количестве значений натуральных $n$.

**21.** Докажите, что уравнение не имеет решений в натуральных числах:

a) $x^x + y^y = z^z$;

b) $x^x + 2y^y = z^z$.

**22.** Найдите наименьшее натуральное число $m$ такое, что уравнение $x^x + my^y = z^z$ имеет хотя бы одно решение $(x, y, z)$ в натуральных числах.

**23.** Докажите, что для любых натуральных $a$ и $d$ найдется число $n$ такое, что

a) число $a_n = a + nd$ начинается с 10;

b) число $a_n = a + nd$ начинается с любого наперед заданного натурального $s$;

c) членов прогрессии, начинающихся с $s$, бесконечно много.

**24.** Известно, что для натурального числа выполняется равенство

$A = \sum_{1 \le k \le A} r_k$, где $r_k$ - остаток от деления $A$ на $k$.

Найдите все такие $A$.

**25.** Решите в натуральных числах уравнение $xy + yz + zx = xyz + 2$.

**26.** Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи.

**27.** Докажите, что при всех натуральных $n$ число $1990^n - 1$ не делится на $1000^n - 1$.

**28.** Докажите, что для простых $p > 5$ при натуральных $n$ равенство $(p-1)! + 1 = p^n$ невозможно.

**29.** Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что все их попарные произведения также различны.



**30.** Известно, что $a, b, c, d > 0$ и $cd = 1$. Докажите, что между числами $ab$ и $(a+c)(b+d)$ всегда есть квадрат натурального числа.

**31.** Докажите, что для любого натурального $k > 1$ существует натуральное число $m_k$ такое, что для натуральных $n \ge m_k$ между числами $n$ и $2n$ содержится по крайней мере одна $k$-я степень натурального числа, и найти наименьшие числа $m_k$ для $k = 2$ и $k = 3$.

**32.** Пусть $S(n)$ – сумма цифр натурального числа $n$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных $n$, что $S(3^n) \ge S(3^{n+1})$.

**33.** Пусть $S(n)$ – сумма цифр натурального числа $n$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных $n$, что $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

**34.** Докажите, что для любого $M$ существует натуральное $N$ такое, что сумма цифр $S(2^n) > M$ при всех натуральных $n > N$.

**35.** Даны натуральные числа $m$ и $n$, причем $n \le 100$. При обращении дроби $\frac{m}{n}$ в десятичную ученик получил после запятой на некотором месте последовательные цифры 167. Докажите, что ученик допустил ошибку в вычислениях.

**36.** При каком наименьшем натуральном $n$ в десятичной записи несократимой дроби $\frac{m}{n}$ после запятой может встретиться набор цифр ...501... ?

## 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

1. Найдите минимальное натуральное $n$ такое, что $n = 2a^2 = 3b^3 = 5c^5$.

2. Пусть последовательность $\{p_k\}$ задается следующим образом – $p_1 = 2$ и $p_{n+1}$ - максимальный простой делитель числа $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Докажите, что в последовательности $\{p_k\}$ никогда не встретится число 5.

3. В последовательности натуральных чисел $a_1 = 2$, $a_n$ - произведение первых $n$ простых чисел. Известно, что разность некоторых двух чисел этой последовательности равна 30 000. Найдите эти числа.

4. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать так, что любые два выбранных числа взаимно просты.

5. а). Докажите, что если произведение нескольких попарно взаимно простых чисел – точный квадрат, то каждое из них – точный квадрат.

   b) Докажите тот же факт для точной $k$-й степени ($k \geq 3$).

6. Докажите, что уравнение имеет конечное число натуральных решений:

   а) $x! + 1987 = y^2$;

   b) $x! + a = y^2$ при натуральном $a$, не являющимся полным квадратом;

   с) $x! - a = y^2$ при любом натуральном $a$.

7. Докажите, что число 1986! не является точным квадратом.



8. Сумма пяти делителей натурального числа $a$ - простое число. Докажите, что произведение этих пяти делителей не превосходит $a^4$. *(СПб97)*

9. Найдите все натуральные числа меньшие 300, имеющие ровно 15 делителей.

10. Известно, что натуральное число имеет ровно 1982 натуральных делителя. Может ли это число делится на 66?

11. Докажите, что натуральное число имеет нечетное количество натуральных делителей в том и только в том случае, когда оно является точным квадратом

    ***(см. также задачу 2 серии 8).***

12. Натуральные числа $a$ и $b$ имеют ровно по 99 натуральных делителей. Может ли число $ab$ иметь ровно 1000 натуральных делителей?

13. Сколько натуральных решений имеет уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1980}$.

14. Найдите хотя бы одно натуральное число $n$ такое, что каждое из чисел $n, n+1, \ldots n+20$ имеет с числом 30030 общий делитель, больший 1.

15. Докажите, что ни при каком натуральном $n$ число $n!$ не делится на

    а) $2^n$;

    b) $p^n$ для простых $p$.

16. Докажите, что при $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$ число $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ - целое.

**17.** Пусть $\varphi(n)$ - количество натуральных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с ним. Докажите, что $\varphi(n)$ четно при $n>2$.

**18.** Найдите все натуральные $n$, делящиеся на $\varphi(n)$.

**19.** Докажите, что сумма $\varphi(d)$, взятая по всем натуральным $d$, делящим $n$, равняется самому числу $n$.

**20.** Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа $n$ на простые множители, тогда $\varphi(n)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_m^{\alpha_m}-p_m^{\alpha_m-1}\right)=$

$$=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_m-1)=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

**21.** Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа $n$ на простые множители. Докажите, что сумма $k$-ых степеней всех различных натуральных делителей $n$ равна

$$\frac{p_1^{(\alpha_1+1)k}-1}{p_1^k-1}\cdot\frac{p_2^{(\alpha_2+1)k}-1}{p_2^k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_m^{(\alpha_m+1)k}-1}{p_m^k-1}.$$

**22.** Число $n$ называется совершенным, если сумма всех его собственных (меньших $n$) натуральных делителей равна $n$. Докажите следующую теорему Евклида:

если число $2^{k+1}-1$ - простое, то число $2^k(2^{k+1}-1)$ - совершенное.

**23.** Докажите следующую теорему Эйлера: каждое четное совершенное число представляется в виде $2^k(2^{k+1}-1)$, где $2^{k+1}-1$ - простое.

**24.** Для натуральных чисел $a,b,c,d$ выполнено равенство $ab=cd$. Докажите, что



a) существуют целые числа $x,y,z,t$ такие, что $a=xy, b=zt, c=xz, d=yt$;

b) число $a+b+c+d$ является составным;

c) число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ является составным.

**5.** Докажите равенство $\dfrac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2}=\dfrac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$.

**6.** Натуральные числа $k,l,m$ таковы, что $k^3$ делится на $l$, $l^3$ делится на $l$, $m^3$ делится на $l$. Докажите, что число $(k+l+m)^{13}$ делится на $klm$.

**7.** Дано множество $M$, состоящее из 1985 различных натуральных чисел, простые делители которых не превосходят 26. Докажите, что из множества $M$ можно выбрать:

a) два различных числа, произведение которых – точный квадрат;

b) четыре попарно различных числа, произведение которых – точная четвертая степень.

## 4. ДЕЛИМОСТЬ

1. Известно, что при некоторых целых $a$ и $b$ число $(16a+17b)(17a+16b)$ делится на 11. Докажите, что оно делится и на 121.
2. Натуральные числа $m$ и $n$ таковы, что $34m=43n$. Докажите, что число $m+n$ – составное.
3. Сумма двух натуральных чисел равна 770. Может ли их произведение делиться на 770?
4. В примере на умножение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные – разными. Докажите, что не могла получиться запись:
   a) $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{eeff}$;
   b) $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{efef}$.
5. Каждое из натуральных чисел $a,b,c,d$ делится на натуральное число $ab-cd$. Докажите, что $ab-cd=1$.
6. Четное число $a$ таково, что из делимости $a$ на простое число $p$ следует делимость числа $a-1$ на $p-1$. Докажите, что $a$ является степенью двойки.
7. Докажите, что число $2^{200}-1$ делится на
   a) 15;
   b) 17.
8. При каких натуральных $n$ число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323?
9. На что и при каких $n$ может сокращаться дробь $\dfrac{6n+17}{9n+33}$?
10. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.



1. Можно ли из набора гирь $3^1,..,3^n$ выбрать два набора одинакового веса?
2. Пусть натуральные $x,y,z$ удовлетворяют равенству $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что число $xyz$ делится на 60.
3. Докажите, что ни при каком натуральном $n$ сумма
   a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$;
   b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$

   не является натуральным числом.
4. Число $k+1$ – простое. Докажите, что число $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3k+1}+\ldots+\frac{1}{nk+1}$ не является натуральным ни при каком натуральном $n$.
5. Докажите, что при любом натуральном $n$ числа $1974^n$ и $1974^n+2^n$ имеют поровну цифр в десятичной записи.

## 5. КОНСТРУКТИВНОСТЬ

1. Найдите минимальное натуральное $n$ такое, что $n = 2a^2 = 3b^3 = 5c^5$.
2. Найдите какие-нибудь целые числа $a$ и $b$ такие, что $\frac{a}{999} + \frac{b}{1001} = \frac{1}{999999}$.
3. Найдите минимальное натуральное $n$ такое, что из делимости числа $n$ на $p-1$ ($p$ - простое число) следует делимость $n$ на $p$.
4. Докажите, что любое натуральное $n > 6$ можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел, отличных от 1.
5. Докажите, что любое натуральное $n > 17$ можно представить в виде суммы трех попарно взаимно простых натуральных чисел, отличных от 1.
6. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество различных простых делителей.
7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы точного квадрата и простого числа.
8. Существует ли 100-значное число без нулей, делящееся на сумму своих цифр?
9. Существует ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы составленные из девяти из них – точные квадраты?
10. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, 3, ..., 1985 так, что разность любых двух выбранных не проста? (*СПб85*)



11. Существует ли 1999 последовательных натуральных чисел, сумма которых является кубом натурального числа?
12. Пусть $c > 1$ - натуральное число, $p$ - простое. Докажите, что число $p^c$ представимо в виде суммы нескольких подряд идущих нечетных чисел.
13. Пусть $p_n$ обозначает $n$ - е по счету простое число. Докажите, что $p_n < 2^{2^n}$.
14. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ между числами $n$ и $n!$ есть простое число.
15. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида:
    a) $4k-1$;
    b) $6k-1$;
    c) $4k+1$.
16. a) Докажите, что в любом натуральном числе делителей вида $4k+1$ не меньше, чем делителей вида $4k+3$.

    b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих поровну делителей вида $4k+1$ и $4k+3$.

    c) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих натуральных делителей вида $4k+1$ больше, чем делителей вида $4k+3$.
17. Докажите, что существует бесконечно много пар различных чисел $m$ и $n$ таких, что числа $m$ и $n$ имеют одинаковые простые делители и числа $m+1$ и $n+1$ имеют одни и те же простые делители.
18. Докажите, что для любого натурального $n$ существует $x > n$ и натуральное $y$ такое, что $y^y \vdots x^x$, а $y$ не делится на $x$.

**19.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных $X$ и $Y$ таких, что $y(y+1)\,\vdots\,x(x+1)$, а числа $y, y+1$ не делятся ни на одно из чисел $x$, $x+1$.

**20.** Докажите, что для каждого натурального $n$ существует такое натуральное $x$, что каждое из чисел $x+1$, $x^x+1$, $x^{x^x}+1$, г, $x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}+1$, г делится на $n$.

**21.** Докажите, что существует бесконечно много нечетных чисел $n$, для которых ни при каком четном $x$ ни одно из чисел $x^x+1$, $x^{x^x}+1$, ..., $x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}+1$, ... не делится на $n$.

**22.** Докажите, что в натуральном ряду существуют промежутки сколь угодно большой длины, не содержащие простых чисел.

**23.** В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел. (*СП672*)

**24.** Докажите, что в последовательности $2^n-1$ существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

**25.** Докажите, что для любого натурального $s$ найдется натуральное $n$ такое, что в каноническое разложение числа $2^n-1$ содержит по крайней мере $s$ простых делителей.

**26.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что $2^n+1\,\vdots\,n$.

**27.** a) Может ли число $2^n+4^n$ быть полным квадратом?

b) Докажите, что существует бесконечно много квадратов вида $2^k+4^k$.



**28.** a) Докажите, что квадраты целых чисел могут давать при делении на 9 только остатки 0, 1, 4, 7;

b) докажите, что сумма цифр числа $x^2$ может принимать любые значения, не противоречащие ограничениям пункта a).

**29.** Пусть $a_0$ и $d$ - натуральные числа. Докажите, что в если в прогрессии $a_0+nd$ встретился точный квадрат, то в ней бесконечно много точных квадратов.

**30.** Пусть $a_0$ и $d$ - натуральные числа. Докажите, что в прогрессии $a_0+nd$

a) есть составное число;

b) есть бесконечно много составных чисел.

**31.** Пусть $a_0$ и $d$ - натуральные числа. Докажите, что в прогрессии $a_0+nd$ есть бесконечно много чисел с одинаковыми простыми множителями в каноническом разложении.

**32.** Докажите, что существует арифметическая прогрессия любой длины из различных попарно взаимно простых чисел.

**33.** Докажите, что в любой возрастающей арифметической прогрессии с натуральными числами существует отрезок любой длины, состоящий из составных чисел.

**34.** Докажите, что в арифметической прогрессии $an+b$ с натуральными взаимно простыми $a$ и $b$, для любого натурального $m$ существует бесконечно много членов, взаимно простых с $m$.

**35.** Докажите, что в арифметической прогрессии $an+b$ с натуральными взаимно простыми $a$ и $b$, существует бесконечно много попарно взаимно простых членов.

**36.** Докажите, что из $k$ целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на $k$.

**37.** В Тяпляпии 1 тяп равен 1001 ляпу. В кошельке Хрюнзеля есть 1998 тяпов, а в кассе магазина сколько угодно тяпов и всего 1 ляп. Докажите, что Хрюнзель может купить в этом магазине несколько хряпок, каждая из которых стоит 1999 ляпов, правильно рассчитавшись с кассой магазина.

**38.** Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

**39.** Из натуральных чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел одно делится на другое.

**40.** Будем говорить, что число обладает свойством $(k)$, если оно разлагается в произведение $k$ последовательных натуральных чисел, больших 1. Найдите число $N$, которое для некоторого натурального числа $k>1$ обладает одновременно свойствами $(k)$ и $(k+2)$.

**41.** Конечно или бесконечно множество решений в натуральных числах уравнения $x^2+y^3=z^2$.

**42.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что $4n^2+1$ одновременно делится на 5 и на 13.

**43.** Докажите, что уравнение $x^2-51y^2=1$ имеет решение в натуральных числах.

**44.** Докажите, что уравнение $(x^2+1)(y^2+1)=z^2+1$ имеет бесконечно много натуральных решений.

**45.** Докажите, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.



**46.** Найдите два взаимно простых четырехзначных числа $a$ и $b$ таких, что $|a^m-b^n|\geq 4\,000$ при любых натуральных $m$ и $n$.

**47.** Пусть $P(n)$ – наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+1989$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$, при которых $P(n)>P(n+1)$.

## 6. АЛГЕБРА

1. Докажите, что число $53\cdot 83\cdot 109+40\cdot 66\cdot 96$ является составным.

2. Докажите, что число $\underbrace{1\ldots1}_{2n}-\underbrace{2\ldots2}_{n}$ является точным квадратом для любого натурального $n$.

3. Известно, что для некоторого натурального $n$ число $n^2+2n$ оканчивается на 4. Найдите предыдущую цифру этого числа.

4. Решите уравнение $5(x^2+y^2+1)=6x+8y$.

5. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, где $p$ - простое число.

6. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число $n$ является простым.

7. Найдите все прямоугольники с целыми сторонами, у которых площадь равна периметру.

8. Докажите, что при любых целых $a,b,c$ уравнение $xy+ax+by=c$ имеет решение в целых числах.

9. При каких $k$ число 101....101 (в записи числа $k$ нулей, $k+1$ единица) является простым?

10. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

11. Каждое из
    a) двух;
    b) $n$ натуральных чисел

    представимо как сумма двух квадратов. Докажите, что их произведение представимо в виде суммы двух квадратов.

12. Докажите, что на окружности с центром в точке (0,0) и радиусом равным $5^{\frac{x}{2}}13^{\frac{y}{2}}$ ($x,y$ - натуральные) всегда найдется целая точка.

13. Докажите, что произведение любых четырех последовательных целых чисел, увеличенное на 1, является полным квадратом.

14. Докажите, что уравнение $x^2-y^2=a^3$ имеет целочисленное решение при любом натуральном $a$.

15. Решите уравнение в простых числах: $x^2+y^3=z^4$.

16. Решите в натуральных числах уравнение $x^3-y^3=91$.

17. Найдите все целые $n$ такие, что $n^3+n \,\vdots\, n+3$.

18. Докажите, что число $2^{10}+2^6\cdot 5^6+5^{12}$ является составным.

19. Докажите, что число $2^{10}+5^{12}$ является составным.

20. Докажите, что число $2^{58}+1$ раскладывается по крайней мере на три натуральных множителя, больших 1.

21. Докажите, что если при натуральном $x$ выполнено $x^4+4^x\neq 5$, то число $x^3+y^3+1=3xy$ – составное.

22. Докажите равенство $\dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{313}$.

**23.** Докажите, что квадрат суммы $n$ различных ненулевых квадратов целых чисел является суммой $n$ квадратов не равных нулю целых чисел.

**24.** Докажите, что для любого натурального $k>2$ существует не более одного простого числа такого, что сумма всех его натуральных делителей является точной $k$-ой степенью.

**25.** Докажите, что в последовательности $2^{2^k}-1$ каждое число делится на все предыдущие.

**26.** Докажите следующую теорему Мерсенна: если число $2^k-1$ является простым, то $k$ - тоже простое

**27.** Докажите следующую теорему Ферма: если число $2^k+1$ является простым, то $k$ - степень двойки

**28.** Докажите следующую теорему Евклида: если $2^{n+1}-1$ является простым числом то число $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ является совершенным.

**29.** Докажите следующую теорему Эйлера: каждое четное совершенное число имеет вид $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$, где $2^{n+1}-1$ является простым числом.

**30.** Докажите, что если $2^n-2 \vdots n$ то $2^{2^n-1}-2 \vdots 2^n-1$.

**31.** Пусть $a_n=2^{2^n}+1$. Докажите, что $2^{a_n}-2 \vdots a_n$.

**32.** Докажите следующее утверждение Сабида ибн Корра – Ферма - Декарта: пусть числа $p=3\cdot 2^{n-1}-1$, $q=3\cdot 2^n-1$ и $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$ простые. Тогда числа $2^n pq$ и $2^n r$ - дружественные, т.е. сумма собственных делителей одного из них равна другому, и наоборот.

**33.** Существует ли натуральное число $n$ такое, что $n^n+(n+1)^n \vdots 1987$?



**34.** Существует ли натуральное число $n$ такое, что $n^{n+1}+(n+1)^{n+1} \vdots 1987$?

**35.** Докажите, что число $2^{3^{100}}+1$

a) делится на $3^{101}$;

b) не делится на $3^{102}$.

**36.** Найдите максимальное $k$ при котором число $1978^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}$ делится на число $1979^k$.

**37.** Решите в натуральных числах уравнение $3\cdot 2^x+1=y^2$.

**38.** Решите в натуральных числах уравнение $3\cdot 2^x+1=7^y$.

**39.** Решите в натуральных числах уравнение $2^n+1=k^2$.

**40.** Известно, что $2^k+1=p^n$, где число $n>1$ натуральное, а $p$ - простое. Докажите, что $k=3$.

**41.** Решите уравнение в целых числах $x^3+y^3+z^3=3xyz+1$.

**42.** Решите в натуральных числах уравнение $x^3+y^3+1=3xy$.

**43.** Решите уравнение $x^3+y^3=9xy-27$ в

a) натуральных числах;

b) в положительных рациональных числах;

c) в целых числах.

**44.** Решите в целых числах уравнение $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$.

**45.** Докажите, что при натуральных $a$ дробь $\dfrac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ является несократимой.

**46.** Натуральные числа $a,b,c,d$ таковы, что $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Докажите, что $a=c$ и $b=d$.

**47.** Известно, что $\left(\sqrt{2}+1\right)^7=\sqrt{57122}+\sqrt{57121}$. Найдите чему равно $\left(\sqrt{2}-1\right)^7$.

**48.** Известно, что $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a+b\sqrt{2}$. Докажите, что $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a-b\sqrt{2}$.

**49.** Докажите, что в условии предыдущей задачи $a^2-2b^2=\pm1$.

**50.** Докажите, что для любого натурального $n$ число $(\sqrt{2}-1)^n$ можно представить в виде $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, где $k$ - натуральное.

**51.** Докажите, что не существует

a) целых;

b) рациональных

чисел $a$, $b$, $c$, $d$ таких, что при некотором натуральном $k$ выполняется равенство $(a+b\sqrt{2})^{2k}+(c+d\sqrt{2})^{2k}=5+4\sqrt{2}$.

**52.** Найдите первые 100 знаков после запятой в разложении числа

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{988}$;

b) $\left(\sqrt{3}+2\right)^{1985}$.

**53.** Докажите, что для любого натурального $k$ найдется натуральное $n$ такое, что $\sqrt{n+1981^k}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{1982}+1\right)^k$.

**54.** Докажите, что число $\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$ - рациональное.

**55.** Докажите, что число $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}}$ - иррациональное.

**56.** Числа $a,b,\sqrt{a}+\sqrt{b}$ - рациональные. Докажите, что числа $\sqrt{a},\sqrt{b}$ рациональные.



**57.** Существуют ли такие вещественные $a$ и $b$, что число $a+b$ – рациональное, а число $a^n+b^n$ - иррациональное при всех натуральных $n$>1?

**58.** Существуют ли такие вещественные $a$ и $b$, что число $a+b$ – иррациональное, а число $a^n+b^n$ - рациональное при всех натуральных $n$>1?

**59.** Найдите все вещественные $a$ такие, что числа $a+\sqrt{15}$ и $\sqrt{15}-\frac{1}{a}$ являются целыми.

**60.** Числа $m$ и $n$ натуральные, причем $\frac{m}{n}<\sqrt{7}$. Докажите, что $\frac{m}{n}<\sqrt{7}-\frac{1}{mn}$.

**61.** Числа $m$ и $n$ натуральные, причем $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$. Докажите, что $\frac{m}{n}<\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

**62.** a) Натуральные взаимно простые числа $x,y,z$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=z^2$, причем $x$ четно. Докажите, что тогда существуют натуральные взаимно простые числа $u$ и $v$ разной четности такие, что $u>v>0$, $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$.

b) Докажите, что числа $x,y,z$ указанного вида являются взаимно простым решением уравнения $x^2+y^2=z^2$.

**63.** Решите в целых числах уравнение $x^4+y^4=z^2$.

**64.** Решите в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} xz-2yt=3, \\ xt+yz=1. \end{cases}$

**65.** Трехзначное число $\overline{abc}$ - простое. Докажите, что $b^2-4ac$ не является точным квадратом.

**66.** Дан набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различных натуральных чисел, больших 1. Докажите, что при $n>1$ выполняется неравенство: $\left(1-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{a_n^2}\right)\geq\frac{1}{2}$.

**67.** Для рациональных чисел $x$ и $y$ выполняется равенство $x^5+y^5=2x^2y^2$. Докажите, что число $1-xy$ - квадрат рационального числа.



## 7. ИНДУКЦИЯ

**1.** Докажите, что если $x+\frac{1}{x}$ - целое число, то для любого натурального $n$ число $x^n+\frac{1}{x^n}$ также является целым.

**2.** Пусть $x_1, x_2$ - корни уравнения $x^2-6x+1=0$. Докажите, что число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

**3.** Пусть $p$ - нечетное число. Докажите, что при любом натуральном $n$ числа $x_1^n+x_2^n$ и $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$, где $x_1, x_2$ - корни уравнения $x^2+px-1=0$, взаимно просты.

**4.** Докажите, что число $2^{3^{100}}+1$

a) делится на $3^{101}$;

b) не делится на $3^{102}$.

**5.** a) Найдите значение выражения: $\frac{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$;

b) Найдите степень двойки в каноническом разложении числа $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n$ на простые множители.

**6.** Простые числа пронумеровали по порядку: $p_1=2, p_2=3,\ldots$ Докажите, что при $n\geq 12$ $p_n>3n$.

**7.** Докажите, что для любого натурального $n$ существует $n$-значное число, делящееся на $2^n$, десятичная запись которого состоит только из цифр 1 и 2.

**8.** Докажите, что для любого натурального $n$ существует число, делящееся на $5^n$ и не содержащее в десятичной записи ни одного нуля.

9. Докажите, что существует такое натуральное число $n$, что среди цифр десятичной записи числа $5^n$ есть хотя бы 1968 нулей.

10. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа $n$. Докажите, что

a) $S(a+b) \le S(a)+S(b)$;

b) $S(ab) \le S(a)S(b)$.

11. Докажите, что для любого натурального $m$ существует натуральное $n$ такое, что $n$ записано единицами и нулями, сумма его цифр $S(n)$ равна $m$, а сумма цифр его квадрата $S(n^2)$ равна $m^2$.

12. Докажите, что последовательность $2^n-3$, $n=2,3,4...$ содержит подпоследовательность, состоящую из попарно взаимно простых чисел.

13. Докажите, что число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$.

14. Докажите, что число $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}\right]$ является нечетным.

15. Найдите максимальную степень двойки, на которую делится число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{n}\right]$.

16. Докажите, что для любого натурального числа $a_1>1$ существует возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2$ делится на $a_1+a_2+\ldots+a_k$.

17. Пусть последовательность $\{u_n\}$ задается по следующему правилу: $u_0=1$ и $u_1=2$ и $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ при $n\ge 2$. Докажите, что любое натуральное число $N$ имеет единственное представление в виде $N=a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_Nu_N$, где $a_r=0$ или $a_r=1$ и $a_ra_{r+1}=0$ при $r\ge 1$.



18. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить как сумму не более чем $n$ натуральных чисел, являющихся различными делителями $n!$.

19. Докажите, что любое положительное рациональное число, меньшее 1, однозначным образом представляется в виде $\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n!}$, где $a_i$ - целые числа, $0\le a_i\le i$.

20. Докажите, что $\frac{1}{2}$ равна сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0<p<q\le n$, $p+q>n$ и $(p,q)=1$.

21. Назовем натуральное число $n$ *хорошим*, если существуют такие натуральные числа $a_1,\ldots,a_k$, что их сумма равна числу $n$, а сумма обратных к ним чисел равна 1. Известно, что числа 33, 34, ..., 73 – хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, - хорошие.

22. Пусть $a_n$ - бесконечная последовательность натуральных чисел, такая что при любых $n$ и $k$ число $a_{k+n}-a_n$ делится на $a_k$. Обозначим $b_n=a_1a_2...a_n$. Докажите, что при всех $n$ и $k$ число $b_{k+n}$ делится на $b_kb_n$.

23. Обозначим через $d(n)$ наименьший номер числа Фибоначчи, кратного $n$. Через $k(n)$ обозначим такое наименьшее $k$, что $F_k \vdots n$ и $F_{k+1}-1 \vdots n$. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на $n$ – периодическая, с наименьшим периодом $k(n)$ и $k(n) \vdots d(n)$.

24. Докажите, что в арифметической прогрессии $an+b$ с натуральными взаимно простыми $a$ и $b$, для любого натурального $k$ существует бесконечно много членов, являющихся произведением $k$ различных простых множителей, предполагая известным утверждение задачи при $k=1$ (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии).



## 8. РАЗБИЕНИЕ НА ПАРЫ

1. Докажите, что количество двузначных чисел, делящихся на сумму своих цифр, нечетно.
2. Докажите, что натуральное число имеет нечетное количество натуральных делителей в том и только в том случае, когда оно является точным квадратом.
3. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа $n^2$ нечетна.
4. Пусть $\varphi(n)$ - количество натуральных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с ним. Докажите, что $\varphi(n)$ четно при $n>2$.
5. Пусть $d_1,\ldots d_k$ - все натуральные делители числа $n$. Докажите, что $(d_1\cdot\ldots\cdot d_k)^2=n^k$.
6. Пусть $d(n)$ - количество натуральных делителей числа $n$. Докажите, что $d(n)\le 2\sqrt{n}$.
7. Пусть $d(n)$ - количество натуральных делителей числа $n$. Докажите, что $d(n)\le\sqrt{3n}$.
8. Пусть $S(n)$ - сумма всех натуральных делителей числа $n$, $d(x)$ - их количество. Докажите неравенство $\sqrt{n}\le\dfrac{S(n)}{d(n)}\le\dfrac{3}{4}n$.
9. Известно, что $n+1\,\vdots\,24$. Докажите, что сумма всех натуральных делителей числа $n$ также делится на 24.
10. Докажите, что при нечетном $m>3$ сумма всех натуральных $x\in[1;m]$ таких, что $x^2-x+1\,\vdots\,m$, делится на $m+1$.

**11.** Докажите, что при нечетном $n$, большем 1, сумма $1^n + 2^n + ... + (n-1)^n \vdots n$.

**12.** Докажите, что при простом $p \geq 5$ числитель дроби, получающейся после приведения к общему знаменателю выражения $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1}$, делится на

a) $p$;

b) $p^2$.

**13.** Пусть $p$ и $q$ – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число $p$ делится на 1979.

**14.** Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем $n$.

**15.** Докажите, что число всех правильных несократимых дробей со знаменателем $n$ является четным числом.

**16.** Числа от 1 до $2n$ разбиты на две группы по $n$ чисел в каждой. Докажите, что множества остатков при делении на $2n$ попарных сумм чисел каждой группы (включая суммы вида $a+a$) совпадают.

**17.** Пусть $S(n)$ - сумма всех натуральных делителей числа $n$, отличных от $n$. Докажите, что уравнение $S(n)=1\ 000\ 000$ имеет менее 1 500 000 натуральных решений.

**18.** Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из совокупности чисел 1, 2, …, 1982 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?



## 9. СРАВНЕНИЯ

**1.** Найдите наименьшее натуральное число $n$ такое, что $n \underset{2}{\equiv} 1$, $n \underset{3}{\equiv} 2$, $n \underset{4}{\equiv} 3$, $n \underset{5}{\equiv} 4$, $n \underset{6}{\equiv} 5$.

**2.** Докажите, что для любого натурального $a$, взаимно простого с 10, найдется число, десятичная запись которого состоит из одних единиц, делящееся на $a$.

**3.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $(2^n-1)^n-3$ делится на $2^n-3$.

**4.** Докажите, что при целом $a$ и натуральном $n$ число $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

**5.** Пусть $p$ и $q$ – последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p+q$.

**6.** Докажите, что 1985!!+1986!! делится на 1987.

**7.** Докажите, что к любому натуральному числу можно приписать несколько цифр слева так, что результат будет делиться на 1993.

**8.** Найдите все натуральные числа $a$ для которых существует число из одних единиц, делящееся на $a$.

**9.** Натуральные числа $m$ и $n$ взаимно просты. Докажите, что найдется натуральное $k$ такое, что

a) число $mk-1$ делится на $n$;

b) число $m^k-1$ делится на $n$.

**10.** Докажите, что из $n$ целых чисел можно выбрать несколько таких, что их сумма делится на $n$.

**11.** В Тяпляпии 1 тяп равен 1001 ляпу. В кошельке Хрюнзеля есть 1998 тяпов, а в кассе магазина сколько угодно тяпов и всего 1 ляп. Докажите, что Хрюнзель может купить в этом магазине несколько хряпок, каждая из которых стоит 1999 ляпов, правильно рассчитавшись с кассой магазина.

**12.** Есть 100 купюр достоинством $a$ и $b$ тугриков, где $a,b \le 100$ и $a \ne b$, причем имеются купюры и того, и другого достоинства. Докажите, что можно купить без сдачи несколько задачников по теории чисел ценой 101 тугрик каждый и порвать их в клочья.

**13.** Последовательность натуральных чисел задана соотношениями $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Докажите, что при всех $n$ числа $x_n$ и $n$ взаимно просты. (*СПб97*)

**14.** Известно, что некоторое число представимо в виде суммы двух полных квадратов двумя различными способами. Докажите, что это число не является простым.



## 10. СПУСК

1. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 7z^2 + 7t^2$ не имеет ненулевых целочисленных решений.
2. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.
3. Решите в целых числах уравнение $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.
4. Решите в целых числах уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.
5. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 = 7 \cdot 8^k$ не имеет решений в целых числах для любого натурального $k$.
6. Докажите, что число $16^n \cdot 31$ нельзя представить в виде суммы 15 четверных степеней целых чисел.
7. Найдите все решения уравнения в рациональных числах: $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$.
8. Из 13 гирь натурального веса любые 12 можно разложить на две кучи равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.
9. Из 13 гирь произвольного веса (не обязательно рационального) любые 12 можно разложить на две кучи равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.
10. Пусть $a,b$ - натуральные числа такие, что $a^2 + b^2$ делится на $ab + 1$ без остатка. Докажите, что $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ является квадратом целого числа.

## 11. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ, АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА И ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НОД

1. Найдите минимальное натуральное число $n$ такое, что делится на .
2. Найдите наибольший общий делитель чисел $\underbrace{1..1}_{n}$ и $\underbrace{1..1}_{m}$.
3. Докажите, что если $(2^n-1, 2^m-1)=1$, то числа $m$ и $n$ взаимно просты.
4. Докажите, что $(2^m-1, 2^n-1)=2^{(m,n)}-1$.
5. Докажите, что $(a^m-1, a^n-1)=a^{(m,n)}-1$.
6. Докажите, что для $m \neq n$ верно равенство $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=1$.
7. Докажите, что при нечетном $m$ верно равенство $(2^m-1, 2^n+1)=1$.
8. При каких натуральных $k$ и $n$ число $2^n+1$ делится на $2^k-1$?
9. При каких натуральных $m,n$ и $k$ число $m^n+1$ делится на $m^k-1$?
10. При каких натуральных $m,n$ и $k$ число $m^n-1$ делится на $m^k+1$?
11. Пусть $a, b, m, n$ – натуральные числа такие, что $a$ и $b$ взаимно просты и $a>1$. Докажите, что если $a^m+b^m$ делится на $a^n+b^n$, то $m$ делится на $n$.
12. Докажите, что для натуральных чисел $m$ и $a, a>1$, выполняется равенство:
$$\left(\frac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)=(a-1, m).$$
13. Сумма неполного частного и остатка, полученных при делении некоторого натурального числа на 100, равна сумме неполного частного и остатка, полученных при делении того же числа на 1995. Чему могут быть равны неполные частные?



14. Множество целых чисел обладает следующим свойством: вместе с любыми двумя числами оно содержит их сумму и разность. Докажите, что это множество состоит из всех чисел, кратных некоторому числу.
15. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.
16. Докажите, что существует такое натуральное $n$, что куб можно разбить на любое число кубов, начиная с $n$. Найдите хотя бы одно такое $n$.
17. Натуральные числа $x$ и $y$ взаимно просты. Найдите максимальное число $k$, не представимое в виде $ax+by$, где $a,b$ - натуральные.
18. Пусть $a$ и $b$ – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что любую сумму, начиная с $ab-a-b+1$ можно уплатить монетами достоинства $a$ и $b$ тугриков, а сумму $ab-a-b$ - нельзя.
19. Пусть натуральные числа $p$ и $q$ взаимно просты. Целое число $n$ назовем ***хорошим***, если оно представимо в виде $px+qy$, где $x$ и $y$ – целые неотрицательные числа, и ***плохим*** в противном случае. Докажите, что наибольшим плохим числом является число $c=pq-p-q$, и всегда, если $n$ -хорошее, то $c-n$ плохое и наоборот.
20. Найдите наименьшее натуральное $n$, тремя способами представимое в виде $13x+73y$ при натуральных $x$ и $y$.
21. Пусть $a,b$ и $c$ – попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что $2abc-ab-bc-ca$ - это наибольшее целое

число, не представимое в виде $xab+ybc+zca$, где $x, y, z$ - неотрицательные целые числа.

**22.** Остап Бендер раздавал слонов 28 членам и 37 не членам профсоюза, причем всем членам профсоюза досталось поровну слонов, и всем не членам – тоже поровну. Оказалось, что у Остапа был единственный способ раздать слонов таким образом. Какое наибольшее количество слонов у него могло быть?

**23.** В испорченном лифте работают только две кнопки. Одна из них поднимает на $a$ этажей вверх, вторая - опускает на $b$ этажей вниз, причем если нужного этажа не существует, то лифт остается неподвижным.

a) Докажите, что при взаимно простых натуральных $a$ и $b$ существует дом, в котором лифт ***работает***, т.е. с любого этажа можно попасть на любой другой;

b) Докажите, что если лифт ***работает*** в $k$-этажном доме, то он ***работает*** и в доме с большим числом этажей;

c) Найдите наименьшее число $k$ такое, что в $k$-этажном доме лифт ***работает***.

d) Пусть $n > a+b$. Сделав $n$ нажатий кнопок, мы оказались на том же этаже, с которого начали свой путь. Докажите, что в процессе движения хотя бы на одном из этажей мы побывали дважды.

**24.** В султанстве Сулейманском была выпущена бесконечная серия монет достоинством в $a_1$ таньга, в $a_2$ таньга, и так далее. Докажите, что найдется такое $n$, что любую сумму, которую можно уплатить выпущенными монетами, можно уплатить уже монетами достоинствами в $a_1, a_2, \ldots, a_n$.



## 12. MIXTURA

*Постулат Бертрана (теорема Чебышева)*

**1.** a) Выведите из постулата Бертрана, что число $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым при любом натуральном $n$;

b) Без использования постулата Бертрана докажите, что число $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ не является целым при любом натуральном $n$.

**2.** a) Докажите, что число $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$ не является целым ни при каком натуральном $n$;

b) Докажите, если $k+1$ - простое число, то число $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\ldots+\frac{1}{kn+1}$ не является целым при любом натуральном $n$.

**3.** Докажите, что из постулата Бертрана, вытекает теорема о том, что для каждого натурального $n>4$ между числами $n$ и $2n$ содержится хотя бы одно число, являющееся произведением двух различных простых чисел, а при $n>15$ между числами $n$ и $2n$ содержится хотя бы одно число, являющееся произведением трех различных простых чисел.

**4.** Докажите, что из постулата Бертрана следует, что для каждого натурального $k$ при достаточно больших натуральных $n$ между числами $n$ и $2n$ содержится хотя бы одно число, являющееся произведением $k$ различных простых чисел.

*Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии*

**5.** Докажите, что в арифметической прогрессии $an+b$ с натуральными взаимно простыми $a$ и $b$, для любого натурального $s$ существует бесконечно много членов, являющихся произведением $s$ различных простых множителей, предполагая известным утверждение задачи при $k=1$ (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии).

**6.** Докажите, что для любого натурального числа $m$ существует такое простое $p$, что сумма цифр числа $p$ больше чем $m$.

**7.** Докажите, что для любого натурального $m$ существует простое число, в десятичной записи которого по крайней мере $m$ нулей.

*От Ферма до Эйлера*

**8.** a) Докажите теорему Ферма: для любого простого $p$ простые делители числа $2^p+1$, большие 3, имеют вид $2kp+1$, где $k$ – целое.

b) Докажите, что для нечетного простого $p$ все делители числа $2^p-1$ имеют вид $2kp+1$, где $k$ – целое.

**9.** Докажите, что для натурального числа $a$, не делящегося на 17, одно из чисел $a^8+1$ или $a^8-1$ делится на 17.

**10.** a) Пусть $p$ - простое число, большее 5. Докажите, что $\underbrace{111\ldots111}_{p-1\ единица} \vdots\, p$;

b) Пусть $p$ - простое число, не равное 3. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots111}_{p\ единиц}$ не делится на $p$.



**11.** Докажите, что для любого натурального $k$ найдется натуральное $n$ такое, что в каноническое разложение числа $2^n-1$ содержит по крайней мере $k$ различных простых делителей.

**12.** Найдите все такие простые числа $p$, что число $2^p+1 \vdots\, p$.

**13.** Докажите, что для любого нечетного простого числа $p$ существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что $n\cdot 2^n+1 \vdots\, p$.

**14.** Верно ли, что при натуральном $a$ число $a^2+1$ не делится на $4k-1$ если

a) число $4k-1$ является простым;

b) число $4k-1$ является натуральным?

**15.** Натуральные числа $a$ и $b$ таковы, что $15a+16b$ и $16a-15b$ – квадраты натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать минимум из этих двух квадратов?

**16.** Найдите все натуральные $n$ такие, что $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n \vdots\, n$.

*(см. также задачу 11 серии 8)*

**17.** Докажите, что для любого натурального $a$ существует натуральное $m$ такое, что $m \vdots\, a$ и $S(m)=a$.

**18.** Докажите, что при нечетном $n$ число $2^{n!}-1 \vdots\, n$.

*Китайская теорема об остатках*

**19.** Пусть даны три попарно различных целых числа $a,b,c$.

a) Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что числа $a+n, b+n, c+n$ попарно взаимно просты;

b) Докажите, что существуют четыре попарно различных целых числа $a,b,c,d$ такие, что для любого натурального $n$ числа $a+n,b+n,c+n,d+n$ не попарно взаимно просты.

**20.** Докажите, что существует арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины, в которой каждое число является степенью натурального числа с показателем, большим 1.

**21.** Докажите, что существует последовательность произвольной длины, состоящая из последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не является степенью натурального числа с показателем степени, большим единицы.

*Понемногу обо всем*

**22.** Найдите все тройки чисел $a$, $b$, $c$, являющихся степенями пятерки с целыми неотрицательными показателями, такие, что одно из них получается выписыванием двух других подряд.

**23.** Каждая из 20 гирь весит целое число граммов, причем общая масса всех гирь меньше 1 тонны. Докажите, что можно выделить два непересекающихся набора гирь одинакового веса.

**24.** Каких чисел больше среди натуральных чисел от 1 до 1000000: представимых в виде суммы точного квадрата и точного куба или не представимых?

**25.** Докажите, что у всякого натурального числа количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 1 или 9, не меньше, чем число делителей, десятичная запись которых оканчивается на 3 или 7. (*СПб97*)



**26.** Докажите, что не существует набора из 100 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 98 из них делится на сумму двух оставшихся. (*СПб97*)

**27.** Даны натуральные числа $a_1 < \ldots < a_n$. Докажите, что их НОК не меньше чем $na_1$.

**28.** Докажите, что среди $n$ попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 1, но меньших $(2n-1)^2$, найдется простое.

**29.** Докажите, что при $n \geq 12$ среди $n$ попарно взаимно простых натуральных чисел, больших 1, но меньших $9n^2$, найдется простое.

**30.** Докажите, что не существует бесконечной арифметической прогрессии, в которой каждое число является степенью натурального числа с показателем, большим 1.

**31.** Докажите, что для $u_i$ - членов последовательности Фибоначчи, выполняется равенство: $(u_m,u_n)=u_{(m,n)}$.

**32.** a) Докажите, что если $a+1 \neq 2^k$, то существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что $a^n+1 \vdots n$;

b) Верно ли утверждение пункта а) для любого натурального $a$?

***(утверждение пункта а) носит название теоремы Ройтера)***

**33.** Найдите все натуральные $n$, большие 1, такие что $2^n+1$ делится на $n^2$.

**34.** Натуральные числа $x$, $y$, $p$, $n$, $k$ таковы, что $x^n+y^n=p^k$. Докажите, что если $n$ – нечетное число, большее 1, а $p$ – нечетное простое число, то $n$ является степенью числа $p$.

**35.** Пусть $S(n)$ – сумма цифр натурального числа $n$.

a) Существует ли такое $n$, что $n+S(n)=1980$?

b) Докажите, что из двух последовательных натуральных чисел хотя бы одно представимо в виде суммы $n+S(n)$.

**36.** Натуральные числа $a$ и $b$ получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что суммы цифр следующих чисел равны:

a) $2a$ и $2b$;

b) $5a$ и $5b$.

**37.** Четные натуральные числа $a$ и $b$ получаются друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что суммы цифр чисел $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ равны.

**38.** Среди $p+1$ попарно различных натуральных чисел можно выбрать два числа, отношение большего из которых к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$.

a) Докажите это утверждение в предположении, что $p$ - простое число.

b) Верно ли это утверждение для произвольного натурального $p$?

*Десятичные дроби*

**39.** Пусть $a_n$ - последняя цифра числа a) $\left[\left(\sqrt{10}\right)^n\right]$; b) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^n\right]$.

Докажите, что последовательность $\{a_n$ непериодична.

**40.** Докажите, что обыкновенная дробь $m/n$ представима в виде конечной десятичной тогда и только тогда, когда $n$ не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.



**41.** Докажите, что если $m/n$ – несократимая дробь и $(n,10)=1$, то первая цифра в десятичном разложении этой дроби равна $[10m/n]$.

**42.** Пусть $n$ делится на простое число, отличное от 2 и 5, и $r$ – остаток от деления $10m$ на $n$. Докажите, что если $0,abcd...$ - десятичная запись числа $\frac{m}{n}$, то $0,bcd...$ - десятичная запись числа $\frac{r}{n}$.

**43.** Докажите, что любая обыкновенная дробь может быть представлена в виде конечной или периодической десятичной дроби.

**44.** Найдите длину периода дроби:

a) $\frac{1}{10^n-1}$;

b) $\frac{k}{10^n-1}$ для $1<k<10^n$.

**45.** a) Докажите, что обыкновенная правильная дробь $\frac{m}{n}$ представима в виде чисто периодической десятичной дроби тогда и только тогда, когда $(n,10)=1$.

b) Докажите, что длина периода этой дроби равна наименьшему натуральному числу $t$, для которого $10^t-1$ делится на $n$.

c) Докажите, что для произвольной дроби $\frac{m}{n}$ длина периода ее. десятичной записи равна наименьшему числу $t$, для которого найдется натуральное число $k$ такое, что $10^k(10^t-1)$ делится на $n$.

**46.** Докажите, что наименьшее $k$, удовлетворяющее предыдущему условию, будет длиной предпериода.

**47.** Докажите, что длина предпериода десятичного разложения правильной несократимой дроби со знаменателем $n$ не превосходит $\log_2 \frac{n}{3}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = 3 \cdot 2^k$.

a) Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичной дроби $\frac{m}{n}$ меньше $n$.

b) Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичного разложения любой правильной дроби со знаменателем $n$ не превосходит $\varphi(n)$, причем равенство достигается лишь для дробей с чисто периодическим разложением.

c) Докажите, что если $n$ взаимно просто с 10, то длина периода дроби $\frac{m}{n}$ будет делителем числа $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера.

**48.** Пусть $p > 5$ - простое число. Докажите, что число, стоящее в периоде десятичной записи дроби $\frac{1}{p}$ сразу после запятой, делит каждое число, полученное из него циклической перестановкой цифр.

**49.** Пусть $p > 5$ - простое число. Докажите, что если длина периода десятичной записи дроби $\frac{1}{p}$ является четным числом,



то весь период можно разбить на две равных половики, сумма которых будет равна числу, в десятичной записи которого встречаются лишь девятки.

**50.** Докажите, что при простом $p$, не равном 2 и 5, длины периодов несократимых дробей $\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p^2}, \frac{a_3}{p^3}, \ldots, \frac{a_n}{p^n}, \ldots$ будут каждый раз увеличиваться в $p$ раз, начиная с некоторого места.

**51.** Докажите, что сумма и разность периодических дробей имеет предпериод, не больший максимума их предпериодов, и период, не больший НОК их периодов.

**52.** Пусть $[m,n] = \text{НОК}(m,n)$, $]m,n[ = [m,n]/C$, где $C$ – произведение всех простых чисел (в соответствующих степенях), входящих в разложения $m$ и $n$ в одинаковых степенях. Докажите, что сумма и разность дробей с периодами $m$ и $n$ имеют период, делящийся на $]m,n[$ и делящий $[m,n]$, и предпериод, равный максимуму их предпериодов, если они различны.

a) Докажите, что если дробь имеет период $t$ и предпериод $k$, то ее квадрат имеет период не более $t(10^t-1)$ и предпериод не более $2k$.

b) Докажите, что если дроби имеют периоды $t$ и $d$ и предпериоды $k$ и $s$, то их произведение имеет период не более $\frac{td}{(t,d)}(10^{(t,d)}-1)$ и предпериод не более $k+s$.